Statistik och Dataanalys I I

Föreläsning 21 - Hypotestest och jämföra grupper

Oskar Gustafsson

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Översikt

- **Mera hypotestest: fel av typ I och II**
- **Jämföra två populationer - oberoende stickprov**
- **Jämföra två populationer - parade data**

Praktisk vs Statistisk signifikans

- **Teststatistiska**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Stora stickprov: även små skillnader $\bar{X} - \mu_0$ blir **signifikanta**.
- Det betyder inte alltid att de är **praktiskt betydelsefulla**.
- Studie 1:
  - $\bar{x} = 1$, $\mu_0 = 0$, $s = 2$, $n = 10$.

$$t_{\text{obs}} = \frac{1 - 0}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = 1.58$$

- Studie 2:
  - $\bar{x} = 0.05$, $\mu_0 = 0$, $s = 2$, $n = 10000$.

$$t_{\text{obs}} = \frac{0.05 - 0}{\frac{2}{\sqrt{10000}}} = 2.5$$

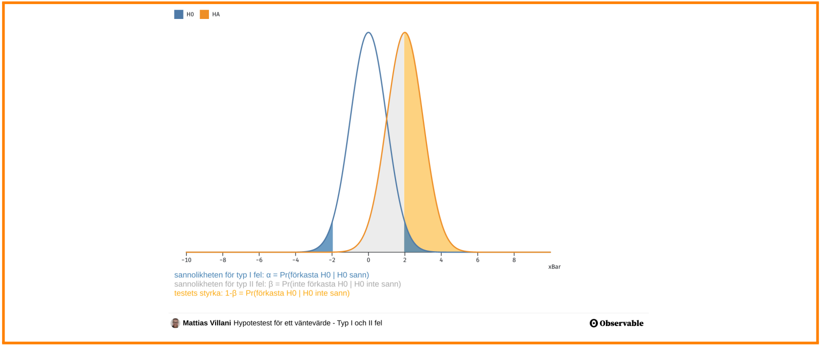
Fel av typ I och II

- **Fel av typ I**:
  - $\alpha = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$.
  - Bestäms av kritiska värdet.
- **Fel av typ II**:
  - $\beta = P(\text{inte förkasta } H_0 \mid H_A \text{ sann})$.
  - Beror på kritiska värdet och **värdet på μ under H_A**.
- **Testets styrka**
  - $1 - \beta = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_A \text{ sann})$

Fel av typ I och II

		Sanningen	
		H_0 sann	H_0 falsk
Beslut	ej förkasta H_0	**OK**	**Typ II fel**
	förkasta H_0	**Typ I fel**	**OK**

Fel av typ I och II - interaktivt



Multipla test

- **Vid hypotestest på signifikansnivån $\alpha = 0.05$:**
  - Vi förkastar H_0 när H_0 är sann (typ I fel) i snitt var 20:e gång.
  - Det är alltså inte helt ovanligt.

- **Om vi gör två oberoende hypotestest där H_0 är sann?**
  - Sannolikheten att det första inte förkastas (inget typ I fel) blir $P(\text{"inte fel"}) = 1 - 0.05 = 0.95$.
  - Testar vi 2 gånger får vi

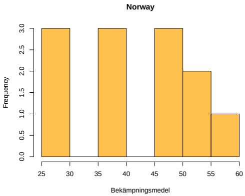
$$P(\text{"inte fel på första" och "inte fel på andra"}) =$$
$$P(\text{"inte fel på första"}) \times P(\text{"inte fel på andra"}) =$$
$$(1-0.05)^2 = 0.9025$$

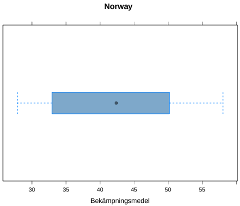
- **Signifikansnivån ändras när vi utför fler test!**
  - Detta bör man justera för, men inte på den här kursen.

Jämföra grupper - bekämpningsmedel i lax

SDMdata Farmed_salmon

- `Total.pestocide` i 153 laxar vid 8 olika platser.
- Grupp 1: Eastern Canada med $n = 24$ laxar. $N(\mu_1, \sigma_1)$.
  - $\bar{x}_1 = 33.572$
  - $s_1 = 7.671$
- Grupp 2: Norge med $n = 12$ laxar. $N(\mu_2, \sigma_2)$.
  - $\bar{x}_2 = 41.763$
  - $s_2 = 10.373$
- Är $\mu_1 = \mu_2$?





Jämföra grupper - konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$

- Grupp 1: n_1 observationer från populationen $N(\mu_1, \sigma_1)$.
  - Medelvärde $\bar{x}_1$ och standardavvikelse s_1.
- Grupp 2: n_2 observationer från populationen $N(\mu_2, \sigma_2)$.
  - Medelvärde $\bar{x}_2$ och standardavvikelse s_2.
- **Oberoende** observationer **inom och mellan grupperna**.

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = Var(\bar{X}_1) + Var(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

- **Standardfel**

$$SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

- **Konfidensintervall för differensen $\mu_1 - \mu_2$**

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{0.025,\mathrm{df}} \cdot SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$$

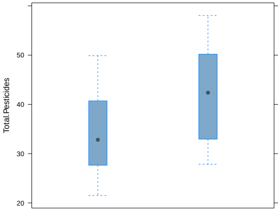
- Frihetsgraderna df har en komplicerad formel.

Antal frihetsgrader för differensen

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Jämföra grupper - bekämpningsmedel i lax

SDMdata Farmed_salmon




```
> # Using the t.test function to compute C.I. and do test H0: mu1 = mu2
> t.test(Total.Pesticides ~ Location, data = salmonTwoPop)

        Welch Two Sample t-test

data:  Total.Pesticides by Location
t = -2.424, df = 17.223, p-value = 0.02663
alternative hypothesis: true difference in means between group Eastern Canada and group Norway is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -15.314121  -1.068879
sample estimates:
mean in group Eastern Canada         mean in group Norway
                    33.57167                     41.76317
```

Jämföra grupper - test för $\mu_1 = \mu_2$

- Hypotestest för skillnaden mellan två gruppers väntevärden:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$$
$$H_A : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad\qquad H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$$

- Recall: Allmän formel teststatistika

$$\frac{\text{Estimat} - \text{parameter under } H_0}{\text{Standardfel estimator under } H_0}$$

- **Teststatistika**

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_{\mathrm{df}} \text{ under } H_0$$

- Förkastar H_0 om $|t_{obs}| > t_{crit}$.
- p-värde från t_{df}.

Jämföra parade grupper

- **Parade data**. Ex **mäter samma n personer** (eller enheter) vid två tillfällen:
- Mätningar vid tidpunkt 1: $N(\mu_1, \sigma_1)$.
- Mätningar vid tidpunkt 2: $N(\mu_2, \sigma_2)$.
- **Beroende** stickprov, med lika många observationer.
- Skapa **differenser** av mätningarna: $d_i = x_{1i} - x_{2i}$.
- **Differenserna ska vara oberoende** mellan mellan dom olika enheterna, men beroende mellan mätningarna hos samma person tillåts.

K.i och hypotestest för parade grupper

- **Standardfel**

$$SE(\bar{d}) = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

- **95%-igt konfidensintervall**

$$\bar{d} \pm t_{0.025,n-1} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

- **Hypotestest**

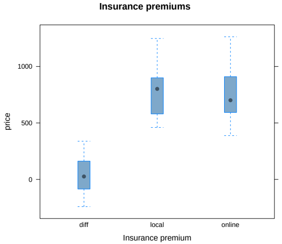
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$T = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Local vs online insurance sales

SDMdata Ch 21 online insurance

Person	Local	Online	PriceDiff
1	550	388	162
2	856	593	263
3	460	497	-37
4	1248	910	338
5	580	665	-85
6	1022	1263	-241
7	773	703	70
8	830	789	41
9	900	1001	-101
10	710	699	11
medelvärde	792.900	750.800	**42.100**
standardfel	235.431	254.956	**174.964**




```
> t.test(price ~ place, data = df, paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  price by place
t = 0.76091, df = 9, p-value = 0.4662
alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -83.06154 167.26154
sample estimates:
mean difference
           42.1
```

Credits

Dessa slides skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, och Oskar Gustafsson för VT 2025.